1. ✉ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ✉ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 2016

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε είναι και συνεχής σε αυτό. **(10 μονάδες)**

Β. Να διατυπώσετε τον κανόνα De L' Hospital για όριο της μορφής $\frac{0}{0}$. **(5 μονάδες)**

Γ. Να χαρακτηρίσετε ως σωστές ή λάθος τις παρακάτω προτάσεις

i) Αν f συνεχής στο $[a,\beta]$ τότε ισχύει η ισοδυναμία $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow \int_a^\beta f(x)dx \geq 0$

ii) Ισχύει $[f(g(x))]' = f'(g(x))\cdot g'(x)$, όπου f και g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

iii) Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ ανάμεσα από δυο διαδοχικές ρίζες της $f'(x)$ παρουσιάζει μια το πολύ ρίζα η f.

iv) Αν f περιττή και στο $x_0 \in A_f$ παρουσιάζει μέγιστο, τότε στο $-x_0$ παρουσιάζει ελάχιστο

v) Αν $f:[-1,8]\rightarrow\mathbb{R}$ και συνεχής τότε ισχύει $\int_2^3 f(x)dx = \int_2^5 f(x)dx + \int_5^3 f(x)dx$

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^3-1}=1$
- f κυρτή στο $\mathbb{R}$
- $g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x-1}, & x\neq 1\\ 3 & ,x=1\end{cases}$

1. Να βρεθούν $f(1)$, $f'(1)$ και η εξίσωση εφαπτομένης για x=1.
2. Αν $f''(1)=14$ να βρεθεί το $g'(1)$.
3. Να μελετήσετε την g ως προς την μονοτονία.
4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(e^x)-x^2\eta\mu(\frac{1}{x})}{x}$
5. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο τομής μεταξύ της C_g και της $y=24\cdot x^{-3}$ στο διάστημα (1,2).

(5x5μ)

1. ✉ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ✉ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν :

- $(x^2-x)\cdot\int_1^{f(0)}(e^x-x)\,dx \le x^4$ *για κάθε* $x\in(-1,1)$
- $f'(x)=f^2(x)\cdot f(-x)$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$.
- $g(\alpha)=\ln(f(\alpha)),\ \ g(\beta)=\ln(f(\beta))$ όπου $0<a<\beta$

1. Να δείξετε ότι $f(0)=1$
2. Να δείξετε ότι $f(x)=e^x$.
3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μια τουλάχιστον εφαπτομένη της C_g που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
4. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta):g'(\xi_1)+g'(\xi_2)=2$
5. Να λυθεί η εξίσωση $f(e^x)+f(3x)=f(2x)+f(1-x)$

(5x5μ)

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται πραγματική συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $\ln\left(f'(x)\right)+f(x)-\ln\left(e^{f(x)}+1\right)=e^{f(x)}+1-f'(x)e^{f(x)}$ *για κάθε* $x\ge 0$
- Η C_f εφάπτεται της y=2x.

1. Να λυθεί η εξίσωση $x+e^x+\ln 2=\ln(e^x+1)+1$
2. Να βρεθεί το $f(0)$
3. Αν $f(0)=0$ να αποδειχθεί ότι $f(x)=\ln(2e^x-1)$ για $x\ge 0$
4. Να γίνει μελέτη της f ως προς μονοτονία κυρτότητα και σύνολο τιμών.
5. Αν F(x) παράγουσα της f(x) για $x\ge 0$ και F(1)=0 τότε :

i) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(F(x+1)-F(x)\right)$

ii) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\dfrac{F(x+1)-xF(x)}{x-2}+\dfrac{\int_0^1 2F(x)\,dx+f(x)}{x-1}=0$ παρουσιάζει μία τουλάχιστον ρίζα στο (1,2).

(3+4+6+5+3+4μ)

...ΕΥΧΟΜΕΘΑ ΕΠΙΤΥΧΙΑ...